

Mouvements sur un plan incliné

Un corps sur un plan incliné peut être immobile ou en mouvement. Selon les situations le corps peut descendre ou monter le plan. Ce mouvement peut être à vitesse constante (MRU) ou avec une accélération constante (MRUA). Sur un plan incliné on peut être amené à utiliser toutes les lois et règles concernant ces mouvements rectilignes dont voici un rappel (pour plus de détails voir le cours sur les *mouvements rectilignes*) :

MRU		
Vitesse moyenne	$v_m = \frac{d}{t}$	La vitesse est constante donc la vitesse moyenne est vitesse instantanée sont identiques.
Vitesse instantanée	$v = \frac{d}{t}$	
Distance	$d = vt$	
Durée	$t = \frac{d}{v}$	
Accélération	$a = 0 \text{ m/s}^2$	La vitesse est constante donc l'accélération est nulle.
Forces	$F = 0 \text{ N}$	Selon la loi fondamentale la résultante de toutes les forces $F = ma$. Si l'accélération est nulle la force résultante est aussi nulle.
Poids	$P = mg$	Lors d'un mouvement sur un plan horizontal le poids est une force perpendiculaire au mouvement et n'y joue donc aucun rôle.

MRUA		
Vitesse moyenne	$v_m = \frac{d}{t}$	
Vitesse instantanée	$v = at + v_0$	
Distance	$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$	
Durée	$t = \frac{v-v_0}{a}$ Si $v_0 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$	
Accélération	$a = \frac{v-v_0}{t}$ Si $v_0 = 0 \Rightarrow a = \frac{2d}{t^2}$	Accélération peut être positive ou négative (décélération)
Forces	$F = ma$	Selon la loi fondamentale la résultante de toutes les forces $F = ma$.
Poids	$P = mg$	Lors d'un mouvement sur un plan horizontal le poids est une force perpendiculaire au mouvement et n'y joue donc aucun rôle.

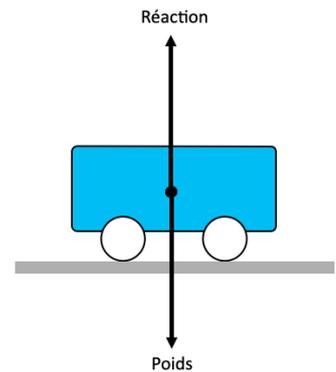
REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

Le poids sur un plan horizontal

Comme vous pouvez le lire dans le rappel ci-dessous le poids ne joue aucun rôle dans un mouvement sur un plan horizontal. Pour vous en convaincre imaginez un chariot posé sur une surface horizontale. Ce chariot a un poids qui est une force verticale dirigée vers le centre de la Terre. Cette force plaque le chariot au sol mais ne peut le mettre en mouvement.

Ne confondez pas le poids qui est une force (unité : Newton) avec la masse (unité : kg) qui représente la quantité de matière constituant le chariot. Selon la loi fondamentale $F = ma$ l'accélération est inversement proportionnelle à la masse ($a = \frac{F}{m}$).



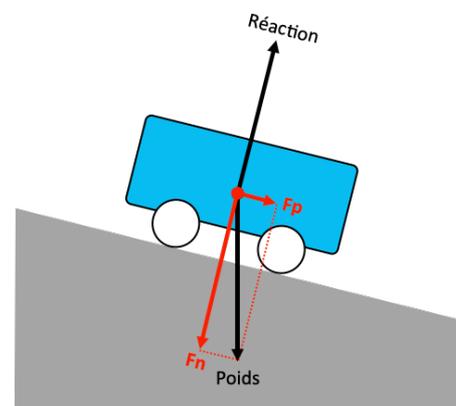
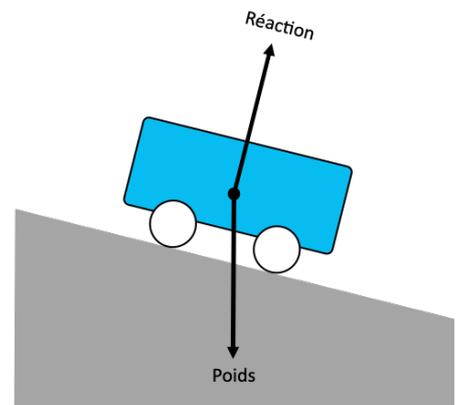
Le poids sur un plan incliné

Sur un plan incliné la situation est différente. Le poids n'est pas perpendiculaire au déplacement et participe ainsi au mouvement. On peut parfaitement imaginer la situation où on pose un chariot sur un plan incliné : le chariot se mettra en mouvement et descendra la pente.

Sur un plan incliné le poids a deux effets : d'une part il tire le corps vers le bas de la pente et d'autre part il plaque le corps sur le plan incliné. Remarquez que le poids est, comme sur un plan horizontal, une force verticale dirigée vers le centre de la Terre. Par contre la réaction ou la force de soutien générée par le plan n'est pas verticale comme sur un plan horizontal mais perpendiculaire au plan.

Décomposition du poids sur un plan incliné

Pour pouvoir étudier le mouvement sur un plan incliné on doit donc distinguer ces deux effets en décomposant le poids (P) en deux composantes : une perpendiculaire (F_n) et une autre parallèle au déplacement (F_p) :



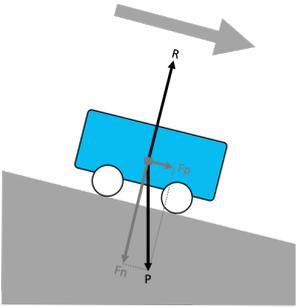
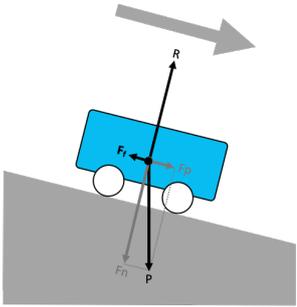
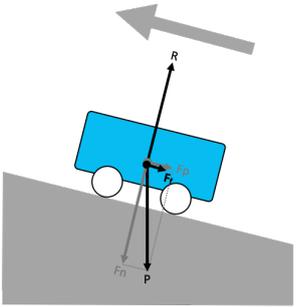
REVISION RAPIDE

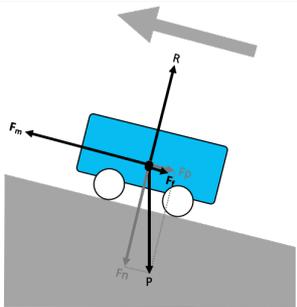
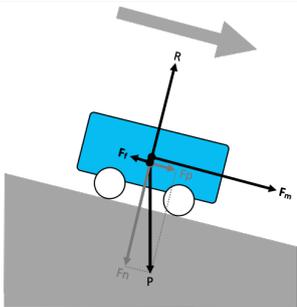
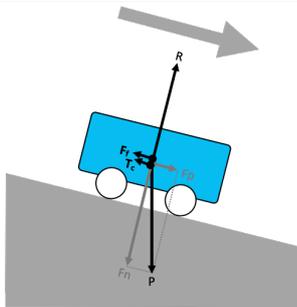
MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

La composante F_n perpendiculaire (ou normale) au plan plaque le corps au sol. La réaction ou la force de soutien générée est directement opposée à cette composante : elle est de même intensité, de même direction, mais de sens opposée à F_n . La composante F_p parallèle au mouvement tire le corps vers le bas de la pente. C'est elle qui participe à l'accélération du corps. En absence d'autres forces, notre chariot descend la pente avec une vitesse de plus en plus grande. On peut déterminer son accélération en fonction de F_p : $a = \frac{F}{m} = \frac{F_p}{m}$.

Ici on a supposé que le chariot était initialement immobile et ne subissait pas d'autres forces comme une force motrice ou des frottements.

Mais on peut imaginer des situations où d'autres forces agissent sur le corps : les forces frottement, une force motrice etc. Pour appliquer correctement la loi fondamentale il faut encore savoir le sens du mouvement : vers le haut ou vers le bas. Voici quelques exemples :

Le chariot descend en roue libre sans subir des frottements :	Le chariot descend en roue libre (sans force motrice) et subit des frottements :	Le chariot monte en roue libre avec une vitesse initiale et subit des frottements :
		
$a = \frac{F_p}{m}$	$a = \frac{F_p - F_f}{m}$	$a = \frac{-F_p - F_f}{m}$

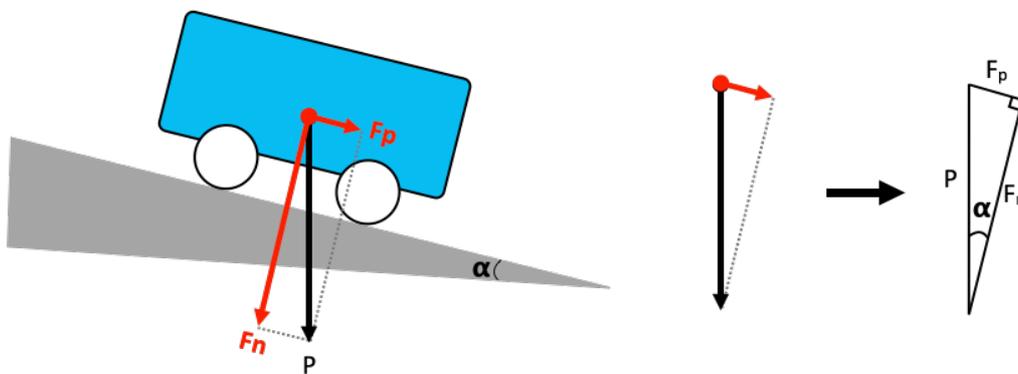
Le chariot est tiré vers le haut avec une force motrice. Il subit aussi des frottements :	Le chariot descend avec une force motrice. Il subit aussi des forces de frottement :	Le chariot descend tout en étant retenu par un câble (T_c). Il subit aussi des frottements :
		
$a = \frac{F_m - F_p - F_f}{m}$	$a = \frac{F_m + F_p - F_f}{m}$	$a = \frac{F_p - F_f - T_c}{m}$

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

Déterminer les composantes du poids

Sur un plan incliné le poids d'un corps (P) et ses deux composantes constituent un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse est égale à la norme du poids et les deux cathètes sont les deux composantes F_n et F_p . Notez que l'angle entre le plan incliné et l'horizon est la même que celui en face de F_p (voir schéma) :



Le poids est le produit de la masse par l'accélération de la gravitation : $P = mg$.

L'application des règles de trigonométrie nous permet de déterminer les deux composantes en fonction du poids :

$$\sin(\alpha) = \frac{F_p}{mg} \Rightarrow F_p = mg \cdot \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{F_n}{mg} \Rightarrow F_n = mg \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_p = mg \cdot \sin(\alpha) \quad F_n = mg \cdot \cos(\alpha)$$

F_p : composante du poids parallèle au plan incliné (unité : N)
 F_n : composante du poids perpendiculaire au plan incliné (unité : N)
 m : masse du mobile (unité : kg)
 α : angle entre le plan incliné et l'horizon

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercices

1. Une bille de 100 g est posée sur un plan incliné qui fait un angle de 15° avec l'horizon. Les frottements sont négligeables.

- a. Déterminer l'accélération de la bille.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_p}{m} = \frac{mg \sin(\alpha)}{m} = g \sin(\alpha) = 9,81 \sin(15) = 2,539 \text{ m/s}^2$$

- b. Calculer sa vitesse après 1,8 secondes de descente.

$$\text{MRUA : } v = at + v_0 = 2,539 \cdot 1,8 + 0 = 4,57 \text{ m/s}$$

- c. Calculer la distance qu'elle parcourt en une seconde.

$$\text{MRUA : } d = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \cdot 2,539 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 = 1,269 \text{ m}$$

- d. Calculer la force de soutient exercée par le plan incliné sur la bille.

$$F_s = F_n = mg \cos(\alpha) = 0,1 \cdot 9,81 \cdot \cos(15) = 0,948 \text{ N}$$

2. Une bille de 100 g est posée sur un plan incliné qui fait un angle de 15° avec l'horizon. Durant la descente les forces de frottements sont de 0,1 N.

- a. Déterminer l'accélération de la bille.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_p - F_f}{m} = \frac{mg \sin(\alpha) - F_f}{m} = \frac{0,1 \cdot 9,81 \cdot \sin(15) - 0,1}{0,1} = 1,539 \text{ m/s}^2$$

- b. Calculer sa vitesse après 1,8 secondes de descente.

$$\text{MRUA : } v = at + v_0 = 1,539 \cdot 1,8 + 0 = 2,77 \text{ m/s}$$

- c. Calculer la distance qu'elle parcourt en une seconde.

$$\text{MRUA : } d = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \cdot 1,539 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 = 0,77 \text{ m}$$

3. Une bille de 100 g descend à vitesse constante un plan incliné qui fait un angle de 15° avec l'horizon. Calculer l'intensité des forces de frottement.

$$F = ma \Rightarrow F_p - F_f = ma$$

$$\text{Vitesse constante} \Rightarrow a = 0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_p - F_f = 0$$

$$\Rightarrow F_f = F_p = mg \sin(\alpha) = 0,1 \cdot 9,81 \cdot \sin(15) = 0,254 \text{ N}$$

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

4. Une voiture d'une tonne monte une pente de 5° à vitesse constante. Les frottements sont de 300 N.

a. Calculer la force motrice développée par la voiture.

$$F = ma \Rightarrow Fm - F_p - F_f = ma$$

$$\text{Vitesse constante} \Rightarrow a = 0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow Fm - F_p - F_f = 0$$

$$\Rightarrow Fm = F_p + F_f = mgsin(\alpha) + F_f = 1000 \cdot 9,81 \cdot \sin(5) + 300 = 1155 \text{ N}$$

b. Calculer la force exercée par la voiture sur la route.

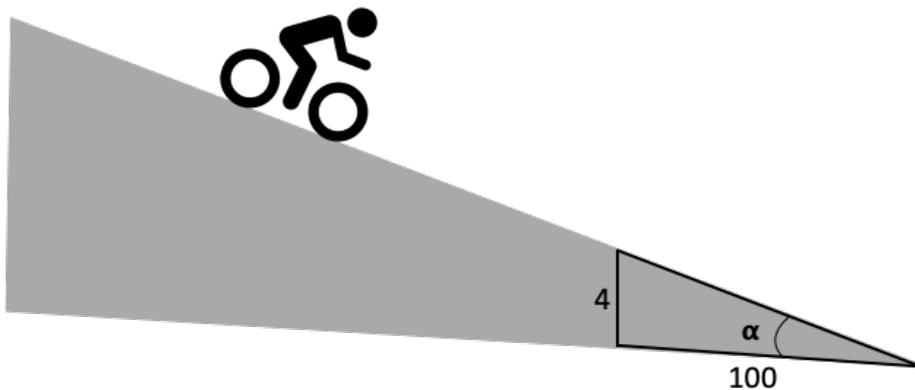
$$Fn = mg\cos(\alpha) = 1000 \cdot 9,81 \cdot \cos(5) = 9773 \text{ N}$$

5. Un cycliste descend une pente de 4% sans pédaler ni freiner. Les forces de frottements sont de 5 N. La masse du cycliste et de son vélo est de 100 kg. Quelle est l'accélération du cycliste ?

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_p - F_f}{m} = \frac{mgsin(\alpha) - F_f}{m}$$

$$\text{Pente 4\% (voir schéma)} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{4}{100} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{100}\right) = 2,29^\circ$$

$$a = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot \sin(2,29) - 5}{100} = 0,342 \text{ m/s}^2$$



REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

6. Une voiture d'une tonne monte une pente de 5° en roue libre. La vitesse initiale de la voiture est de 72 km/h.

- a. Quelle distance parcourt la voiture avant de s'arrêter si les frottements sont négligeables ?

$$\text{MRUA (décélération)} : d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-F_p}{m} = \frac{-mgsin(\alpha)}{m} = -gsin(\alpha) = -9,81 \cdot \sin(5) = -0,855 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{v-v_0}{a} = \frac{0-20}{-0,855} = 23,39 \text{ s}$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot (-0,855) \cdot 23,39^2 + 20 \cdot 23,39 = 233,9 \text{ m}$$

- b. Quelle distance parcourt la voiture avant de s'arrêter si les frottements sont de 500 N ?

$$\text{MRUA (décélération)} : d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-F_p - F_f}{m} = \frac{-mgsin(\alpha) - F_f}{m} = \frac{-mgsin(\alpha) - F_f}{m}$$
$$= \frac{-1000 \cdot 9,81 \cdot \sin(5) - 500}{1000} = -1,21 \text{ m/s}^2$$

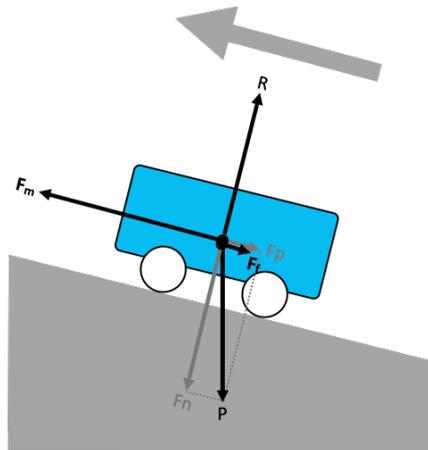
$$t = \frac{v-v_0}{a} = \frac{0-20}{-1,21} = 16,53 \text{ s}$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot (-1,21) \cdot 16,53^2 + 20 \cdot 16,53 = 165,3 \text{ m}$$

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

7. Jean tire à vitesse constante un chariot de 30 kg vers le haut d'une pente de 5° . Il parcourt ainsi 100 mètres en 10 minutes. Les frottements sont de 10 N durant la montée.



- a. Calculer le travail effectué par Jean durant ces 10 minutes.

$$A_{F_m} = F_m \cdot d \cdot \cos(\theta) \quad \theta = \text{angle entre la force et le déplacement}$$

$$F = ma \Rightarrow F_m - F_p - F_f = ma \Rightarrow F_m = F_p + F_f = mg \sin(\alpha) + F_f$$

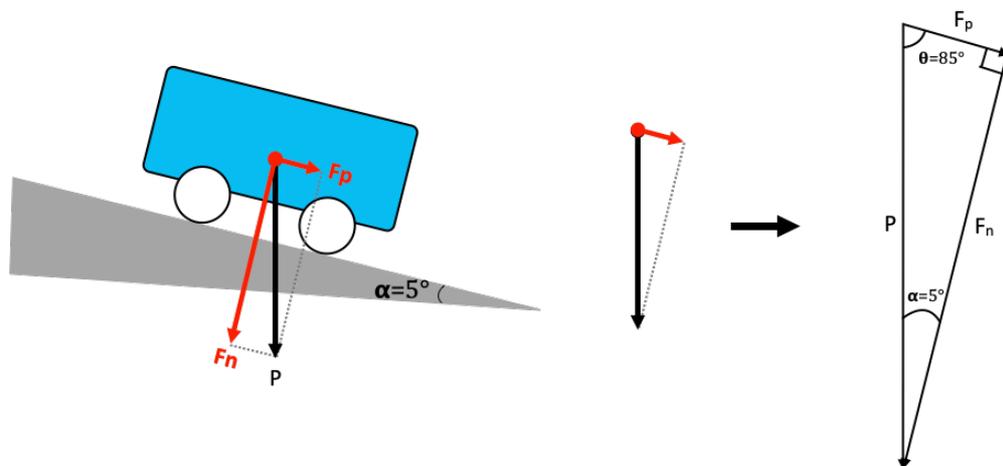
$$F_m = 30 \cdot 9,81 \cdot \sin(5) + 10 = 35,65 \text{ N}$$

$$A_{F_m} = 35,65 \cdot 100 \cdot \cos(0) = 3565 \text{ J}$$

- b. Calculer le travail des forces de frottement durant ces 10 minutes.

$$A_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos(\theta) = 10 \cdot 100 \cdot \cos(0) = 1000 \text{ J}$$

- c. Calculer le travail effectué par le poids (P) du chariot durant ces 10 minutes.



$$A_p = P \cdot d \cdot \cos(\theta)$$

$$P = mg = 30 \cdot 9,81 = 294,3 \text{ N}$$

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

$$\theta = 85^\circ \text{ (voir schéma)}$$

$$A_p = 294,3 \cdot 100 \cdot \cos(85) = 2565 \text{ J}$$

Le travail du poids peut aussi être considéré comme le travail de sa composante parallèle au mouvement (F_p) :

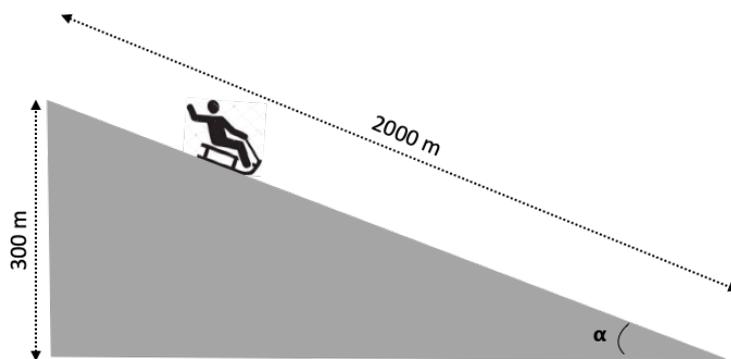
$$A_p = A_{F_p} = mgsin(\alpha) \cdot d \cdot \cos(\theta)$$

$$= 30 \cdot 9,81 \cdot \sin(5) \cdot 100 \cdot \cos(0) = 2565 \text{ J}$$

- d. Calculer le travail effectué par la force de soutient (R) exercée par la route sur le chariot durant ces 10 minutes.

La force de soutient est perpendiculaire au mouvement ($\theta = 90 \Rightarrow \cos(\theta) = 0$). Son travail est nul ($A_R = 0 \text{ J}$).

8. Une personne de 70 kg descend sur une luge une piste de 2 km de longueur. La dénivellation entre le haut et le bas de la piste est de 300 m. Les frottements sont de 5 N durant la descente.



- a. Quelle est l'accélération de la personne durant la descente ?

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_p - F_f}{m} = \frac{mgsin(\alpha) - F_f}{m}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{300}{2000} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$a = \frac{70 \cdot 9,81 \cdot 0,15 - 5}{70} = 1,4 \text{ m/s}^2$$

- b. Après combien de temps la personne arrive en bas de la piste ?

$$\text{MRUA: } t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000}{1,4}} = 53,45 \text{ s}$$

- c. Quelle est la vitesse de la luge en bas de la piste ?

$$\text{MRUA: } v = at + v_0 = 1,4 \cdot 53,45 + 0 = 74,8 \text{ m/s}$$

Remarque : Cette vitesse correspond à environs 269 km/h. Ce qui peut sembler trop rapide pour une luge. Dans cet exercice les frottements sont faible (5 N) et ne

REVISION RAPIDE

MOUVEMENTS SUR UN PLAN INCLINE : CORRECTIONS DES EXERCICES

changent pas durant la descente. Ce qui ne correspond pas à une situation réelle où les frottements augmentent avec la vitesse.