Droites tangentes aux cercles

Il existe trois types de problèmes concernant les droites tangentes aux cercles : droite tangente à un cercle en un point du cercle, droites tangentes à un cercle et de pente donnée et droites tangentes à un cercle depuis un point extérieur au cercle. Les trois problèmes ci-dessous illustrent ces trois types de problèmes. Dans les pages suivantes vous trouverez les explications ainsi que les solutions de ces problèmes.

Problème 1

Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$ et un point P du cercle $P(5; 5)$.
Déterminer l'équation de la droite t qui est tangente au cercle c en son point P.

Problème 2

Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$.
Déterminer les équations des droites t_1 et t_2 tangentes au cercle c et de pente $m_t = \frac{1}{2}$

Problème 3

La procédure est illustrée par l'exemple suivant :
Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$ et le point $Q(2; 4)$.
Il faut déterminer les équations des droites t_1 et t_2 tangentes au cercle c et passant par le point Q.

Droite tangente à un cercle en un point du cercle

Cas 1 : droite tangente à un cercle en un point du cercle

Principe

Une droite t tangente à un cercle c de centre C en un point P du cercle est perpendiculaire au segment CP. Sa pente est donc l'inverse-opposée de la pente de CP. Le point P permet par la suite de déterminer l'ordonnée à l'origine h de t.

Procédure et exemple

La procédure est illustrée par l'exemple suivant :

Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$ et un point P du cercle $P(5;5)$.

Il faut déterminer l'équation de la droite t qui est tangente au cercle c en son point P.

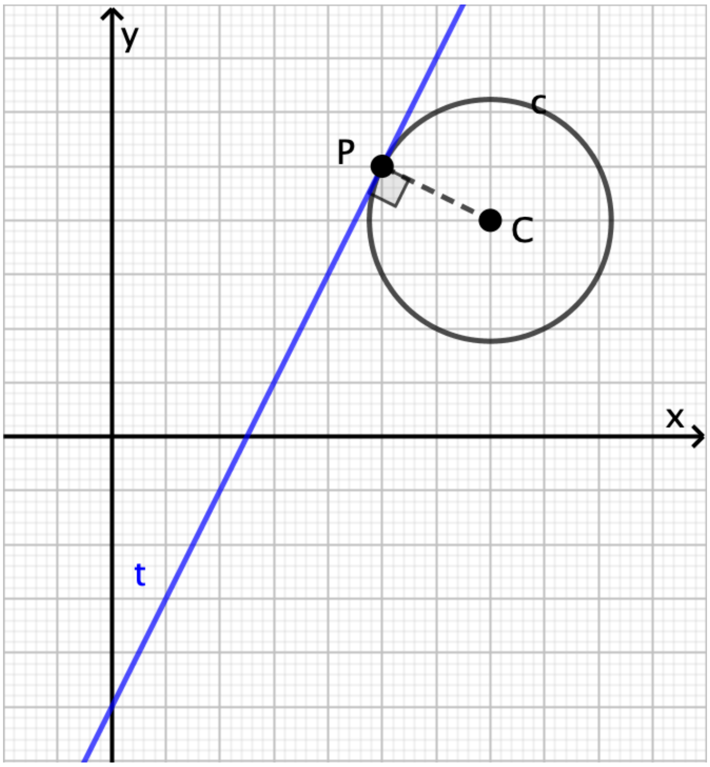
Les cercles et leurs équations

Remarque : L'équation du cercle donne les coordonnées de son centre $C(7;4)$ et son rayon $r = \sqrt{5}$.

Pente d'un segment de droite

Droite perpendiculaire à une autre droite

Étape		Formules	Exemple
1	Calculer la pente du segment CP	$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}$	$m_{CP} = \frac{5-4}{5-7} = -\frac{1}{2}$
2	Déterminer la pente de t	$t \perp CP \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_{CP}}$	$m_t = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$
3	Déterminer l'ordonnée à l'origine de t	$P \in t \Rightarrow y_P = mx_p + h$ $\Rightarrow h = y_P - mx_p$	$h = 5 - 2 \cdot 5 = -5$
5	Donner l'équation de t	$t: y = m_t x + h$	$t: y = 2x - 5$

6	Vérification graphique	

Cas 2 : droites de pente connue tangentes à un cercle

Principe

Il existe deux droites avec la même pente qui sont tangentes à un cercle. Pour trouver leurs ordonnées à l'origine il faut déterminer les coordonnées des points du cercle où ces droites touchent le cercle. Ces points sont les intersections entre le cercle et une droite passant par le centre du cercle et qui est perpendiculaire aux tangentes.

Procédure et exemple

La procédure est illustrée par l'exemple suivant :

Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Il faut déterminer les équations des droites t_1 et t_2 tangentes au cercle c et de pente $m_t = \frac{1}{2}$.

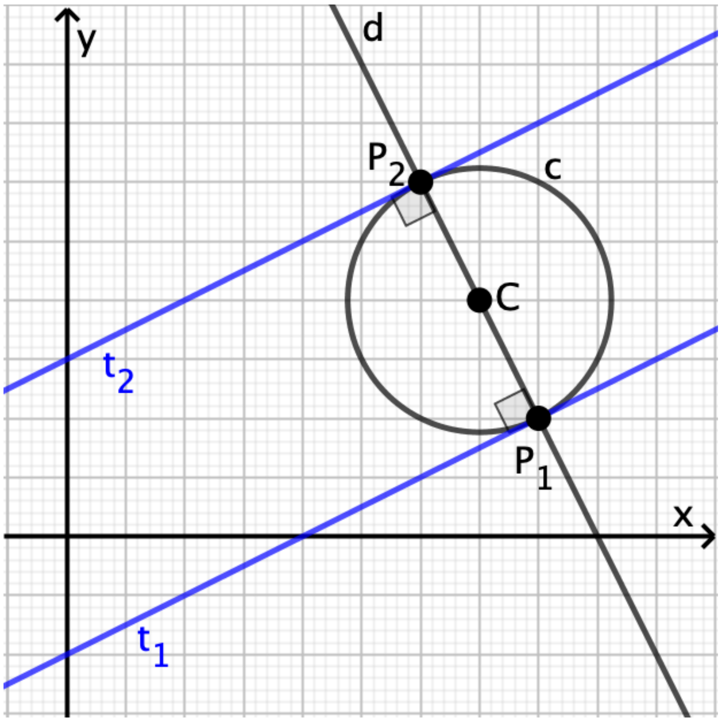
Les cercles et leurs équations

Remarque : L'équation du cercle donne les coordonnées de son centre $C(7;4)$ et son rayon $r = \sqrt{5}$.

Droite perpendiculaire à une autre droite

Intersections d'une droite et d'un cercle

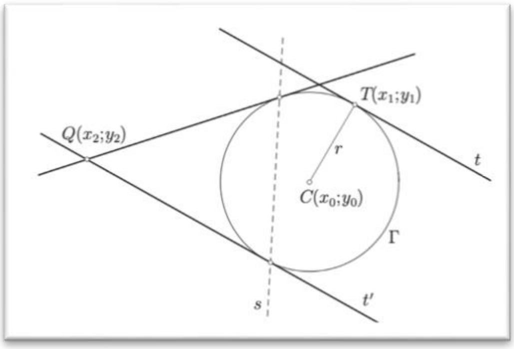
Étape		Formules	Exemple
1	Déterminer la pente de la droite d, perpendiculaire aux droites tangentes et passant par C	$d \perp t_1 \ et \ t_2$ $\Rightarrow m = -\frac{1}{m_t}$	$m = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$
2	Déterminer l'ordonnée à l'origine de d qui passe par C	$C \in d \Rightarrow y_C = mx_C + h$ $\Rightarrow h = y_C - mx_C$	$h = 4 - (-2) \cdot 7 = 18$
3	Donner l'équation de d	$t: y = mx + h$	$t: y = -2x + 18$
4	Calculer les coordonnées des points P_1 et P_2, intersections de d et de c	$\begin{cases}(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \\ y = mx + h\end{cases}$ Résoudre par substitution	$\begin{cases}(x-7)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ y = -2x + 18\end{cases}$ $\Rightarrow (x-7)^2 + (-2x+18-4)^2 = 5$ $\Rightarrow (x-7)^2 + (-2x+14)^2 = 5$ $\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + 4x^2 - 56x + 196 - 5 = 0$ $\Rightarrow 5x^2 - 70x + 240 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$ $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 4$ $x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$ $\Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow y_1 = -2 \cdot 8 + 18 = 2$ $\Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -2 \cdot 6 + 18 = 6$ $P_1(8;2) \quad P_2(6;6)$
5	Utiliser les coordonnées de P_1 et P_2 pour calculer les ordonnées à l'origine de t_1 et t_2	$P_1 \in t_1 \Rightarrow y_{P_1} = m_t x_{P_1} + h_1$ $\Rightarrow h_1 = y_{P_1} - m x_{P_1}$ $P_2 \in t_2 \Rightarrow y_{P_2} = m_t x_{P_2} + h_1$ $\Rightarrow h_1 = y_{P_2} - m x_{P_2}$	$h_1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 8 = -2$ $h_2 = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = 3$
6	Donner les équations de t_1 et t_2	$t_1: y = m_t x + h_1$ $t_2: y = m_t x + h_2$	$t_1: y = \frac{1}{2}x - 2$ $t_2: y = \frac{1}{2}x + 3$

6	Vérification graphique	

Cas 3 : droites tangentes à un cercle et passant par un point extérieur au cercle

Principes

Pour calculer les coordonnées des points où les tangentes touchent le cercle il faut déterminer le polaire du point qui est à l'extérieur du cercle. Le polaire d'un point est la droite qui passe par les deux points où les tangentes touchent le cercle (droite *s* sur le schéma ci-desous). A la page 56 du *formulaire CRM* vous trouverez la formule qui permet de déterminer l'équation du polaire d'un point :



Polaire d'un point Q

$$P \in s \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_2 - x_0)(x - x_0) + (y_2 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

Dans cette formule x_2 et y_2 représentent les coordonnées du point qui est à l'extérieur du cercle, x_0 et y_0 sont les coordonnées du centre du cercle et r représente son rayon (voir le schéma).

Procédure et exemple

La procédure est illustrée par l'exemple suivant :

Soit un cercle c d'équation $c: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$ et le point $Q(2;4)$.

Il faut déterminer les équations des droites t_1 et t_2 tangentes au cercle c et passant par le point Q.

Remarque : L'équation du cercle donne les coordonnées de son centre $C(7;4)$ et son rayon $r = \sqrt{5}$.

Les cercles et leurs équations

Intersections d'une droite et d'un cercle

Droite passant par deux points

Étape		Formules	Exemple
1	Déterminer l'équation de la droite d, polaire de Q	$(x_2-x_0)(x-x_0)+(y_2-y_0)(y-y_0)=r^2$	$Q(2;4)$ $C(7;4)$ $(2-7)(x-7)+(4-4)(y-4)=5$ $\Rightarrow -5x+35=5 \Rightarrow -5x=-30$ $\Rightarrow d: x=6$ Remarque : dans cette exemple le polaire du point Q est une droite verticale
2	Calculer les coordonnées des points P_1 et P_2, intersections de d et de c	$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\\ y=mx+h\end{cases}$ Résoudre par substitution	$\begin{cases}(x-7)^2+(y-4)^2=5\\ x=6\end{cases}$ $\Rightarrow (6-7)^2+(y-4)^2=5$ $\Rightarrow 1+y^2-8y+16=5$ $\Rightarrow y^2-8y+12=0$ $\Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot12=16$ $x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}$ $\Rightarrow y_1=6$ $\Rightarrow y_2=2$ $P_1(6;6)$ $P_2(6;2)$
5	t_1 est la droite qui passe par Q et P_1. t_2 est la droite qui passe par Q et P_2.	$m_{t_1}=\frac{y_{P_1}-y_Q}{x_{P_1}-x_Q}$ $Q\in t_1 \Rightarrow y_Q=m_{t_1}x_Q+h_{t_1}$ $\Rightarrow h_{t_1}=y_Q-m_{t_1}x_Q$ $m_{t_2}=\frac{y_{P_2}-y_Q}{x_{P_2}-x_Q}$ $Q\in t_2 \Rightarrow y_Q=m_{t_2}x_Q+h_{t_2}$ $\Rightarrow h_{t_2}=y_Q-m_{t_2}x_Q$	$m_{t_1}=\frac{6-4}{6-2}=\frac{1}{2}$ $h_{t_1}=4-\frac{1}{2}\cdot2=3$ $m_{t_2}=\frac{2-4}{6-2}=-\frac{1}{2}$ $h_{t_2}=4-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2=5$
6	Donner les équations de t_1 et t_2	$t_1: y=m_{t_1}x+h_{t_1}$ $t_2: y=m_{t_2}x+h_{t_2}$	$t_1: y=\frac{1}{2}x+3$ $t_2: y=\frac{1}{2}x+5$
6	Vérification graphique